Bode Diagrams

از یک پاسخ فرکانسی می‌دانیم:

$AR = \| G(i\omega) \|$ ← پس AR تابع ω است

$$\phi = \measuredangle G(i\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{Im(G(i\omega))}{Re(G(i\omega))}\right]$$

بنابراین ϕ هم تابع ω است.

دو نوع نمودار Bode داریم:

$\log(AR)$ برحسب $\log(\omega)$

ϕ برحسب $\log(\omega)$

هر دو از $0 < \omega < +\infty$

روش رسم ← ابتدا مجانب فرکانس پایین را بدست می‌آوریم.

Low Frequency Asymptote (LFA)

مثلاً برای رسم $\log(AR)$ برحسب $\log(\omega)$:

$$LFA = \lim_{\omega \to 0^+} \log(AR)$$

به شیوه مشابه، مجانب فرکانس بالا را محاسبه می‌کنیم.

High Frequency Asymptote (HFA)

$$HFA = \lim_{\omega \to +\infty} \log(AR)$$

به فرکانسی که دو مجانب به هم برخورد می‌کنند می‌گویند فرکانس گوشه

corner frequency : ω_c

به عنوان مثال نمودار Bode مربوط به یک سیستم مرتبه اول را رسم می‌کنیم.

$$G(s)=\frac{1}{\tau s+1}$$

$$AR=\left\|\frac{1}{\tau\omega i+1}\right\|=\frac{\|1\|}{\|\tau\omega i+1\|}=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

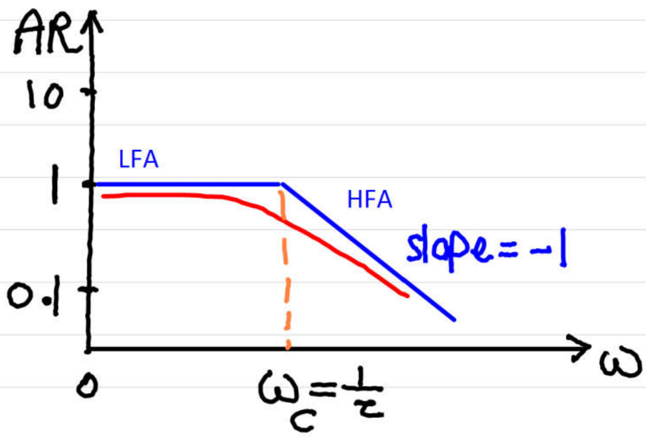
$$\log(AR)=0-\frac{1}{2}\log(1+\tau^2\omega^2)=-\frac{1}{2}\log(1+\tau^2\omega^2)$$

$$LFA=\lim_{\omega\to 0^+}\log AR=\lim_{\omega\to 0^+}-\frac{1}{2}\log(1+\tau^2\omega^2)=0 \quad \text{یا} \quad AR=1$$

$$HFA=\lim_{\omega\to+\infty}\log AR=\lim_{\omega\to+\infty}-\frac{1}{2}\log(1+\tau^2\omega^2)$$

$$=\lim_{\omega\to+\infty}-\frac{1}{2}\log(\tau^2\omega^2)=\lim_{\omega\to+\infty}-\log(\omega)-\log(\tau)$$

$=-\log(\omega)\longrightarrow$ در کاغذ log-log یک خط با شیب 1- می‌شود

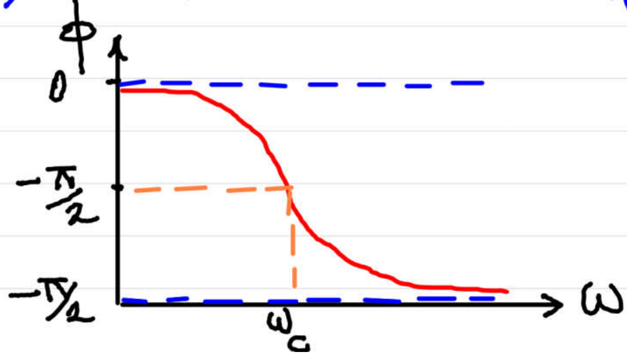


به روش مشابه به رسم ϕ بر حسب ω در $\log\omega$ می‌پردازیم.

$$\phi=\measuredangle\frac{1}{\tau\omega i+1}=\measuredangle 1-\measuredangle(\tau\omega i+1)=0-\tan^{-1}(\tau\omega)=-\tan^{-1}(\tau\omega)$$

$\omega\to 0^+ \Rightarrow \phi=0$

$\omega\to+\infty \Rightarrow \phi=-\pi/2$



نمودار Bode برای سیستم مرتبه دوم

$$AR=\frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\tau\xi\omega)^2}} \leftarrow G(s)=\frac{1}{\tau^2 s^2+2\tau\xi s+1}$$

$$\log(AR)=-\frac{1}{2}\log\left[(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\tau\omega\xi)^2\right]$$

$$LFA=\lim_{\omega\to 0^+}\log(AR)=-\frac{1}{2}\log(1)=0$$ یا $AR=1$

$$HFA=\lim_{\omega\to+\infty}\log(AR)=\lim_{\omega\to+\infty}-\frac{1}{2}\log\left[(1-\tau^2\omega^2)^2+(2\tau\omega\xi)^2\right]$$

$$=\lim_{\omega\to+\infty}-\frac{1}{2}\log(\tau^4\omega^4)=\lim_{\omega\to+\infty}-2\log(\tau\omega)=\lim_{\omega\to+\infty}\left[-2\log\omega-2\log\tau\right]$$

$=-2\log\omega \rightarrow$ در مقیاس لگاریتمی خطی با شیب -2 است.

مشاهده می‌شود: برای $\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$، مقدار AR می‌تواند از 1 بیشتر شود

(البته در محدوده‌ای از ω). اما برای $\xi>\frac{\sqrt{2}}{2}$، مقدار AR همواره کمتر از 1 است.

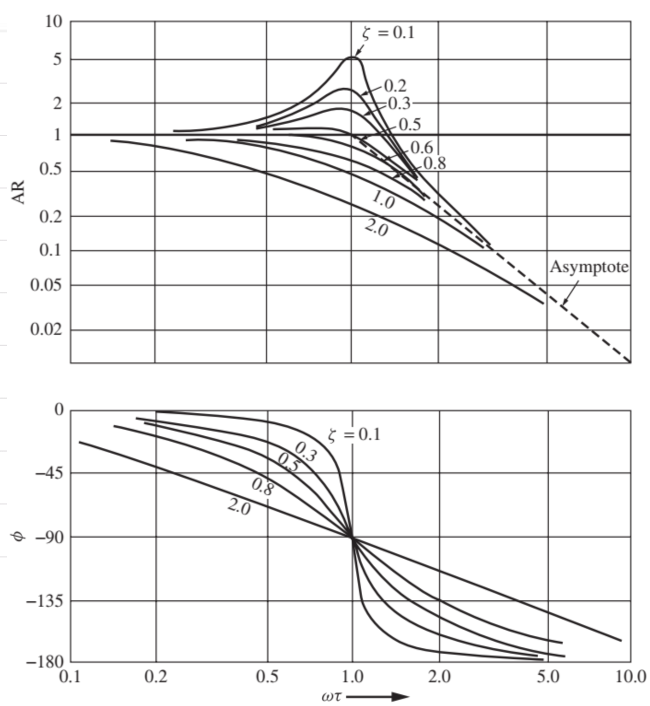
مشاهده می‌شود که در فرکانس خاصی AR ماکزیمم دارد. $\leftarrow$ فرکانس تشدید resonant frequency

با مشتق‌گیری می‌توان اثبات کرد:

$$\omega_r\tau=\sqrt{1-2\xi^2}\ ;\ \xi<\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0.707$$

ω_r: resonant frequency

$$\max(AR)=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\ ;\ \xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$$



ادامه نمودار Bode برای سیستم مرتبه دوم

$$\phi = \measuredangle G(i\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}\right)$$

$\omega \to 0^+ : \phi = 0$

$\omega \to +\infty : \phi = -\pi$ نمودار در صفحه قبلی وجود دارد.

$\omega = \omega_c : \phi = -\pi/2$

نمودار Bode برای transportation lag

$$G(s) = e^{-\tau_d s}$$

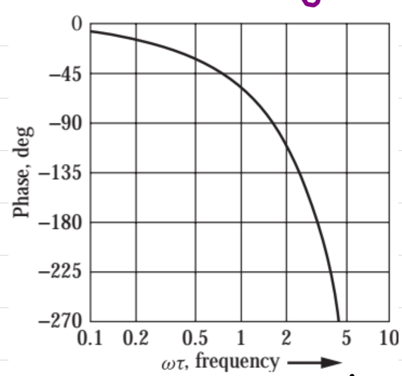
$AR = 1$ for any ω.

$\phi = \measuredangle G(i\omega) = -\tau_d \omega$

توجه کنید که ϕ برحسب ω در مقیاس خطی، یک خط با شیب $-\tau_d$ است.

اما ϕ برحسب $\log\omega$ (مقیاس نیمه لگاریتمی)، رفتار نمایی دارد.

$$\phi = -\tau_d\omega = -\tau_d\, 10^{\log\omega}$$



$G(s) = k_c$ نمودار Bode برای کنترلر تناسبی

$AR = k_c$ for any ω.

$\phi = \measuredangle k_c = \measuredangle k_c + 0i = \tan^{-1}\left(\frac{0}{k_c}\right) = 0$ for any ω.